Ingeniørhøjskolen **Odense Teknikum** Daníel Sigurbjörnsson 13924
Sektor for Informations- og Elektroteknologi
6. semester - 14. Mars 2004
Pia Møller Jensen

Modellering og simulering af dynamiske systemer
Opgave nr. 2

Valgfri modelleringsopgave
DC motor

Indledning:

Vi skal i denne opgave opstille en matematisk model for en DC seriemotor, der kan drives med AC og så kaldes en universalmotor. Data for de enkelte komponenter er vist på figuren, alle data er opgivet i SI enheder, dvs. ohm, volt, osv.

$P_n = 325$ W	$R_a = 0{,}6\ \Omega$
$f_n = 50$ Hz	$R_{se} = R_v + R_s = 0{,}1\ \Omega$
$U_n = 120$ V	$L_a = 0{,}001$ H
$I_n = 2{,}75$ A	$L_{se} = 0{,}026$ H
$n_n = 2800$ rpm	$J = 0{,}015$
$R = R_a + R_{se}$	$L = L_a + L_{se}$

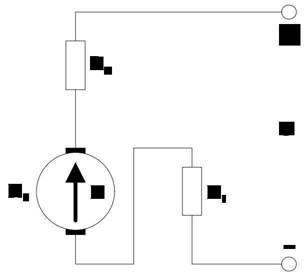

Fig.1 Data og model for universalmotor (Bemærk at $R_{se} = R_v + R_s$)

Vi skal i opgaven opstille en ulineær model for motoren på integralform. Det er primært motorens vinkelhastighed wm og sekundært ankerstrømmen ia vi ønsker at bestemme. Vi opstiller motorens differentielligninger:

$$U = E_a + R \cdot I_a + L \cdot \frac{d}{dt} I_a \qquad \textbf{Ligning 1}$$

$$T_m - T_{last} = J \cdot \frac{d}{dt} \omega_m \qquad \textbf{Ligning 2}$$

Endvidere gælder følgende sammenhænge for DC-motoren :

$$E_a = k \cdot \Phi \cdot \omega_m \qquad \textbf{Ligning 3}$$

$$T_m = k \cdot \Phi \cdot I_a \qquad \textbf{Ligning 4}$$

$$k \cdot \Phi = f_{(I_a)} \qquad \textbf{Ligning 5}$$

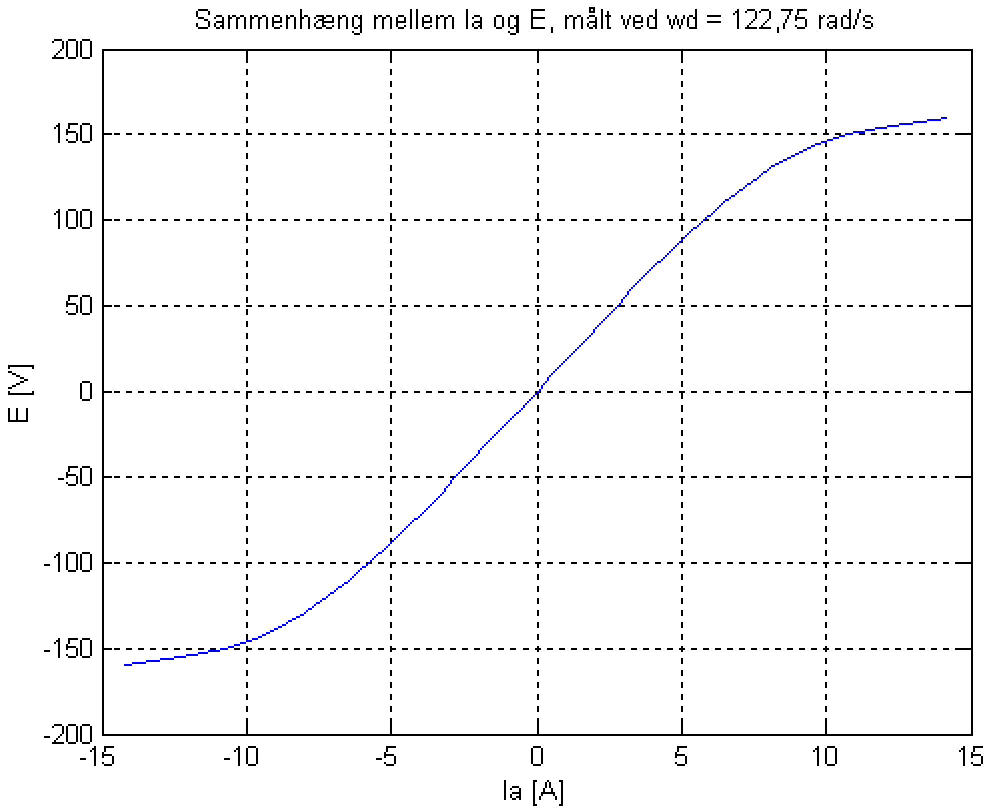

Fig. 2 Ulineær sammenhæng mellem I_a [A] og $K \cdot \Phi \cdot \omega_d$ [V], ω_d = 122,75 $^{rad}/_{s}$

Udfra de opstillede ligninger vælges ω_m og I_a til tilstandsvariable, da disse begge indgår i ligningerne med deres 1.ordens afledede.

Omskrivning af ligninger

Omskriv ligningerne 1 og 2, således at de første ordens afledede af de to tilstandsvariable bliver isoleret. Først kigger vi på ligning nummer 1

$$U = E_a + R \cdot I_a + L \cdot \frac{d}{dt} I_a \qquad \textbf{Ligning 1}$$

Først flytter vi alle lede på samme side

$$U - E_a - R \cdot I_a = L \cdot \frac{d}{dt} I_a$$

Så dividerer vi med L på begge sider og flytter differentialleden så den står på venstre siden

$$\frac{d}{dt} I_a = \frac{U - E_a - R \cdot I_a}{L} \qquad \textbf{Ligning 6}$$

Nu skal samme laves ved ligning nummer 2

$$T_m - T_{last} = J \cdot \frac{d}{dt} \omega_m \qquad \textbf{Ligning 2}$$

Her sættes alle ændringer i et trin

$$\frac{d}{dt}\omega_m = \frac{T_m - T_{last}}{J}$$ **Ligning 7**

Ligninger på integralform

Omskriv de to ligninger til integralform, da det er den foretrukne form når vi senere vil implementere modellen i Simulink. Først kigger vi på ligning nummer 6 og vi integrere på begge sider.

$$\int \frac{d}{dt} I_a dt = \int \frac{U - E_a - R \cdot I_a}{L} dt$$

Her anvendes reglen at

$$\int \frac{d}{dt} I_a dt = I_a$$

Så, nu er muligt at skrive ligningen op igen

$$I_a = \int \frac{U - E_a - R \cdot I_a}{L} dt$$

Til sidst kan vi flytte L udenfor intergralet og så fås den endelige integralform af ligningen

$$I_a = \frac{1}{L}\int \left(U - E_a - R \cdot I_a\right) dt$$ **Ligning 8**

Vi er ikke helfærdig med integralformen. Nu skal vi kigge på ligning nummer 7, som også skal omskrives til integralformet. Vi starter på samme måde som før med at integrere på begge sider

$$\int \frac{d}{dt}\omega_m dt = \int \frac{T_m - T_{last}}{J} dt$$

Her springer vi så over et trin og skriver straks den endelige ligning op

$$\omega_m = \frac{1}{J}\int \left(T_m - T_{last}\right) dt$$ **Ligning 9**

Lineær model

Antag i første omgang at motoren er lineær og aflæs passende værdi for K_1 i det lineære udtryk:

$$k \cdot \Phi = K_1 \cdot I_a$$ **Ligning 10**

Opstil herefter den lineære model på tilstandsform, idet U og T_{last} er input og i_a og ω_m er output.

- Der bliver brug for det du har lært i Modelleringsmodulet Lektion 5 om Linearisering

Vi starter med antage at motoer er lineær og vi prøver at finde passende værdi for K_1 i tidlige nævnte udtryk her før oven. Med lille hjælp af magtest.m script filen i Matlab kan E_a findes udfra valgt I_a strømværdi. Vi vælger er punkt på magnetiseringskurven i script filen (som er akurat den samme kurve som er givet med diss opgave) som ligger i det område hvor den er tilnærmelsesvis lineær. Vi vælger I_a til 2 A og E_a findes til at være 35,54 V. Så sætter vi disse data ind tilhørende ligninger (3 og 5). Fordi vi antager at moteren er lineær så beskrives ligning 5 udfra ligning 10. Hvor K_1 er faktor til tilnærme strømmen I_a til lineær.

$$E_a = k \cdot \Phi \cdot \omega_m$$ **Ligning 3**

$$k \cdot \Phi = f_{(I_a)}$$ **Ligning 5**

$$k \cdot \Phi = K_1 \cdot I_a$$

Før vi indsætter værdierne i ligningerne så leger vi lidt med disse to ligninger (3 og 5). Først isolerer vi $k \cdot \Phi$ i ligning 3.

$$k \cdot \Phi = \frac{E_a}{\omega_m}$$

Nu er muligt at sætte disse to ligninger sammen

$$K_1 \cdot I_a = \frac{E_a}{\omega_m}$$

og isolere K_1, her vælges $\omega_m = \omega_d = 122{,}75$ $^{rad}/_{s}$

$$K_1 = \frac{E_a}{\omega_m \cdot I_a}$$ **Ligning 11**

$$K_1 = \frac{35{,}54}{122{,}75 \cdot 2{,}0} = 0{,}145$$

Nu skal opstilles lineære model på tilstandsform, idet U og T_{last} er input og i_a og ω_m er output. Nu har vi et system med to input og to tilstandsvariable. Vores model vil da væra på formen

$$\frac{dx_1}{dt} = f_{1(x_1,x_2,u_1,u_2)}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_{2(x_1,x_2,u_1,u_2)}$$

Som kan så skrives på tilstandsform

$$\frac{d\Delta\overline{x}}{dt} = A \cdot \Delta\overline{x} + B \cdot \Delta\overline{u}$$

Hvor A og B er koefficienter der varierer med arbejdspunktet. Hvis arbejdspunktet er konstant, så vil A og B være konstante og modellen der beskriver afgivelser fra arbejdspunktet vil da være lineær.

$$\frac{d}{dt}I_a = \frac{U - k \cdot \Phi \cdot \omega_m - R \cdot I_a}{L}$$

$$\frac{d}{dt}\omega_m = \frac{k \cdot \Phi \cdot I_a - T_{last}}{J}$$

Indsættes $K \cdot \Phi = K_1 \cdot I_a$ i de to ligninger du er nået frem til lige herover fås følgende.

$$\frac{d}{dt}I_a = \frac{U}{L} - \frac{K_1 \cdot I_a}{L} \cdot \omega_m - \frac{R}{L} \cdot I_a$$

$$\frac{d}{dt}\omega_m = \frac{K_1 \cdot I_a}{J} \cdot I_a - \frac{T_{last}}{J}$$

Af ligningerne kan vi se at der kan opstilles to 1. ordens differential. ligninger, det vil sige, et 2. ordens system. Du kan også se at systemet ikke er lineært, da systemvariablerne, I_a og ω_m, multipliceres og I_a optræder i anden potens.

Derfor laver vi linearisering. Det gøres i et udvalgt arbejdspunktpunkt kaldet A. Lineariseringen foretages ved hjælp af en Taylor udvikling.

De fundne ulineære differentialligninger kan, som vi også har skrevet, skrives som:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_{1(x_1, x_2, u_1, u_2)} \text{ og } \frac{dx_2}{dt} = f_{2(x_1, x_2, u_1, u_2)}$$

Ved en linearisering, i punktet A, af de ulineære differential ligninger bruges følgende:

$$\frac{d\Delta x_1}{dt} = \left.\frac{\delta f_1}{\delta x_1}\right|_A \cdot \Delta x_1 + \left.\frac{\delta f_1}{\delta x_2}\right|_A \cdot \Delta x_2 + \left.\frac{\delta f_1}{\delta u_1}\right|_A \cdot \Delta u_1 + \left.\frac{\delta f_1}{\delta u_2}\right|_A \cdot \Delta u_2$$

$$\frac{d\Delta x_2}{dt} = \left.\frac{\delta f_2}{\delta x_1}\right|_A \cdot \Delta x_1 + \left.\frac{\delta f_2}{\delta x_2}\right|_A \cdot \Delta x_2 + \left.\frac{\delta f_2}{\delta u_1}\right|_A \cdot \Delta u_1 + \left.\frac{\delta f_2}{\delta u_2}\right|_A \cdot \Delta u_2$$

Udføres ovenstående differentiering af funktionerne f_1 og f_2 i forhold til hver variabel fås følgende lineære model i punktet A.

$$\frac{d\Delta X_1}{dt} = \left(-\frac{k_1 \cdot \omega_m}{L} - \frac{R}{L}\right) \cdot \Delta x_1 + \left(-\frac{K_1 \cdot I_a}{L}\right) \cdot \Delta x_2 + \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \Delta u_1 + (0) \cdot \Delta u_2$$

$$\frac{d\Delta X_2}{dt} = \left(\frac{2 \cdot k_1 \cdot I_a}{J}\right) \cdot \Delta x_1 + (0) \cdot \Delta x_2 + (0) \cdot \Delta u_1 + \left(-\frac{1}{J}\right) \cdot \Delta u_2$$

I ovenstående ligninger skal værdien for I_a og ω_m i det valgte arbejdspunkt indsættes.

Modellen kan også skrives på tilstandsform, stadig ved det valgte punkt A.

$$\frac{d\Delta\bar{x}}{dt} = A \cdot \Delta\bar{x} + B \cdot \Delta\bar{u}$$

Hvor,

$$A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \end{bmatrix}\right|_A \text{ og } B = \left.\begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta u_1} & \frac{\delta f_1}{\delta u_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta u_1} & \frac{\delta f_2}{\delta u_2} \end{bmatrix}\right|_A$$

Udfra disse så kan vi finde tilstandsmodelet

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta u_1} & \frac{\delta f_1}{\delta u_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta u_1} & \frac{\delta f_2}{\delta u_2} \end{bmatrix} \cdot \Delta\bar{u}$$

Hvis vi indsætter værdier ind, men først bogstavsværdier

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1 \cdot \omega_m}{L} - \frac{R}{L} & -\frac{K_1 \cdot I_a}{L} \\ \frac{2 \cdot k_1 \cdot I_a}{J} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \cdot \Delta\bar{u}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{0{,}145 \cdot 122{,}75}{0{,}027} - \frac{0{,}7}{0{,}027} & -\frac{0{,}145 \cdot 2}{0{,}027} \\ \frac{2 \cdot 0{,}145 \cdot 2}{0{,}015} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{0{,}027} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{0{,}015} \end{bmatrix} \cdot \Delta\bar{u}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -685{,}14 & -10{,}74 \\ 38{,}67 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 37{,}04 & 0 \\ 0 & -66{,}67 \end{bmatrix} \cdot \Delta\bar{u}$$

Igen skal vi ved beregningen af de to matricer indsætte værdier for I_a og ω_m i det valgte arbejdspunkt A.

Og ligningen for output ser således ud:

$$\Delta y = \begin{bmatrix} \Delta i_a \\ \Delta\omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta i_a \\ \Delta\omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U \\ T_{last} \end{bmatrix}$$