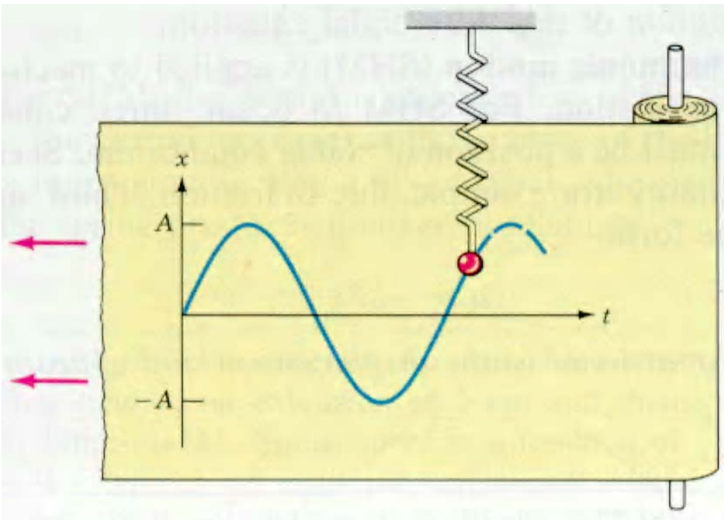
Fjölbrautaskólinn í Breiðholti
Kennari: Birgir
Eðlisfræði 4036

Sveiflur



Reykjavík 1. maí 2000
Daníel Sigurbjörnsson

Sveiflur -kynning

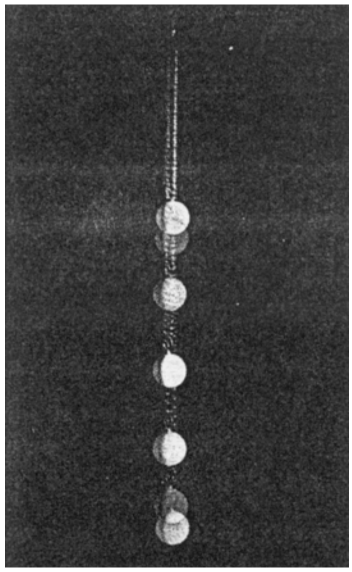
Í eðlisfræðinni kynnumst við ýmsum hugtökum, táknum og formúlum, mörgum þessara hugtaka könnumst við áður en við byrjum í námi, annað lærist með tímanum og svo er eitt og annað sem við munum aldrei vita hvað er. Það eru ekki margir sem ákveða það að kynna sér sveiflur, en allir vita að þær eru til. Sveiflur eru alls staðar í kringum okkur án þess að við tökum beint eftir því. Margt sem kemur fram í eðlisfræðinni er sveiflukennt og þess vegna þarf að gefa þessari hreyfingu sérstakan gaum. Við vitum margt en það einnig margt sem við vitum ekki, sveiflur hafa verið þekkt fyrirbæri í langan tíma, en þrátt fyrir það erum við ekki enn búin að kynnast þeim að fullu.

Í náttúrunni eru sveiflandi eða reglulegar hreyfingar algengar. Margir hlutir eru reglulegir, eins og til dæmis hjartsláttur dýra, árstíðirnar, sveifla pendúls í klukku, titringur atóma í föstu formi, rafstraumurinn sem fer um ljósaperuna sem lýsir upp þessa síðu sem þú ert að horfa á og svona má lengi telja. Og sumir vilja meina að alheimurinn þenjist út og dragist saman á reglulegan og sveiflukenndan hátt sem spannar milljarða ára í senn.

Tvenns konar hreyfingar eru mjög tengdar sveiflukenndum hreyfingum en það eru hringhreyfingar (eða næstum hringlaga) og bylgju hreyfingar. Meðalhiti í heimabyggð þinni breytist reglulega eftir breytingum árstíða og þessar breytingar eru í beinum tengslum við hringhreyfingu jarðar um sólina. Þegar öldur fara fram hjá bryggju, þá sveiflast vatnshæðin á brúastólpunum upp og niður.

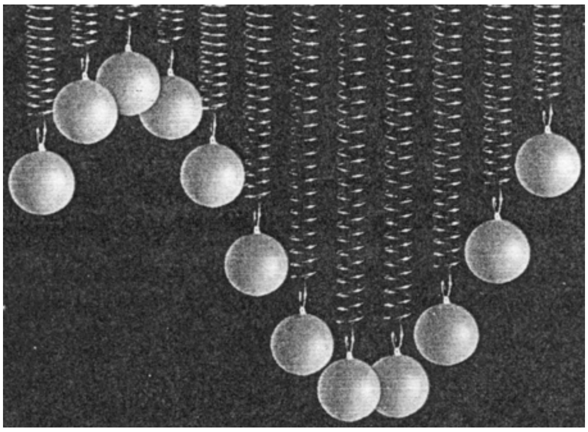
Efnisyfirlit

1 Hreyfilýsing einfaldrar sveifluhreyfingar



Mynd 1-1. Hraðljósmynd af sveiflandi bolta í gormi. Myndin sýnir hreyfinguna á hálfu tímabili. Tími á milli taka eru 60 ms.

Það er hægt að sýna fram á einfalda sveifluhreyfingu með því að horfa á bolta sem hangir neðan í gormi (mynd 1-1). Þegar boltinn er settur fyrir ofan jafnvægispunktinn á gorminum og honum síðan sleppt þá sveiflast hann í einfaldri sveifluhreyfingu, þá hugsum við okkur að enginn núningur verki á gorminn. Mynd 1-2 sýnir það á myndrænan hátt að boltinn sveiflast í eðli sínu á sinuslegan hátt. Það er að ferill boltans er fall af tíma og staðsetningu er eins og fall af sinus eða cosinus.



Mynd 1-2. Hraðljósmynd af sveiflandi bolta. Hér var myndin tekin með snúandi spegli svo þá sést færsla boltans lóðrétt sem fall af tíma.

Skilgreining á hreinnri einfaldri hreyfingu

Hlutur verður fyrir ***einfaldri sveifluhreyfingu*** *ef staðsetning breytist sínuslega við tíma.*

Látum x vera staðsetningu hlutar sem verður fyrir einfaldri sveifluhreyfingu; þá er

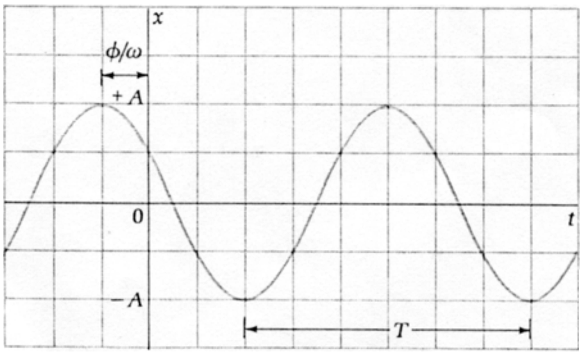
$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$ **Formúla 1- 1**

x-hnit hlutar sem er á einfaldri sveifluhreyfingu

Þegar hlutur sveiflast í eina átt og svo í hina þá breytist x sínuslaga við tíma t þegar x fer á milli $x = A$ og $x = -A$ (mynd 1-3). Af þessum sökum er A kallað ***sveifluvídd*** vegna

Skilgreining á sveifluvídd *A*, hornatíðninni ω og fasafastanum ϕ og fasanum $(\omega t + \phi)$

þess að það lýsir takmörkum hreyfingarinnar. Táknið ω er ***horntíðnin***[1] og gildi þess ákveður hlutfall sveiflunnar. Breytan ϕ er kölluð *fasafasti*, við veljum hann þegar við byrjum á mælingum okkar (t = 0). Formúla 1-1, öll stærðin innan svigans, er breytan af fallinu cosinus og er kölluð *fasi*, $(\omega t + \phi)$. Í næsta hluta sínum við hreyfifræðilega útskýringu á einfaldri sveifluhreyfingu sem leiðir að formúlu 1-1.



Mynd 1-3. x-hnit miðað við tíma *t* fyrir hlut sem sveiflast.

Skilgreining á tímabilinu *T*

Einkennandi útlit allra sveifluhreyfinga er það að hreyfingin endurtekur sig á ákveðnu ***tímabili*** T. Það er að *hlutur fer heilan hring í hreyfingu sinni á þessu tímabili T*, eins og sýnt í formúlu 1-3. Það er fyrir heilan hring þá eykst fasinn $(\omega t + \phi)$ sem nemur 2π rad á meðan tíminn *t* eykst um *T*, eða

$$\omega(t + T) + \phi = (\omega t + \phi) + 2\pi$$

Drögum $(\omega t + \phi)$ frá báðum megin og það gefur okkur $\omega T = 2\pi$, eða

Tengls *T og* ω

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ **Formúla 1- 2**

Tímabilið *T* er í öfugu hlutfalli við ω; því meiri sem horntíðnin er, því minni tímabil tekur hlutinn að fara heilann hring í heyfingu sinni. Einnig er hægt að nota hlutfall sveifla til að lýsa sveiflum, en þá er talað um *tíðnina v*;

[1] Það er venja að nota ω sem tákn fyrir horntíðni. Þar sem táknið er einnig notað fyrir hornhraða. Það þarf að fara að gát og aðgreina þessar tvær merkingar á þessu tákni.

$$v = \frac{1}{T}$$ **Formúla 1- 3** Skilgreining á tíðninni *v*

Þar sem *T* er tíminn sem tekur hlutinn að fara einn hring, þá er *v* fjöldi hringja á tímaeiningu. Einingin fyrir tíðni er Hertz[1] (Hz). Ef við látum $T = 2\pi / \omega$ inn í formúlu 1-3 þá sjáum við að $v = \omega / 2\pi$ eða

$$2\pi v = \omega$$

Hornhraði og horntíðni hafa eiginlega sömu einingu sem er $[\text{tími}]^{-1}$. SI-einingin þessa fremur náskyldra stærða eru $^{rad}/_{s}$ fyrir ω en Hz fyrir *v* (tíðni á einum hring er sama og 1 Hz).Segjum svo að hlutur sem er á sveiflast fram og til baka á tímabilinu $T = 2s$. Þá er tíðnin $v = 1/(2s) = 0{,}5s^{-1} = 0{,}5Hz$ og þá er hornhraðinn $\omega = 2\pi(0{,}5Hz) = \pi\, ^{rad}/_{s}$.

Hraði hlutar sem er á sveifluhreyfingu miðað við x-ás er eftirfarandi jafna

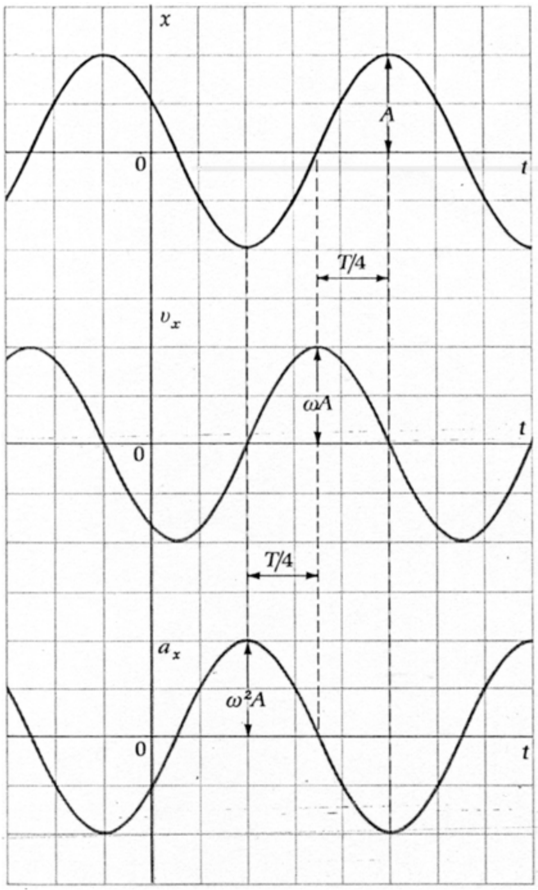
$$v_x = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$ **Formúla 1- 4** Hraði í einfaldri sveiflu

Ef við diffrum þessa jöfnu þá fáum við hröðun hlutarins miðað við x-ás

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$ **Formúla 1- 5** Hröðun í einfaldri sveiflu

[1] Hertz er nefnt eftir Heinrich. R. Hertz (1857-1894), þýskum eðlisfræðingi; uppgötvaði og rannsakaði rafsegulbylgjur.

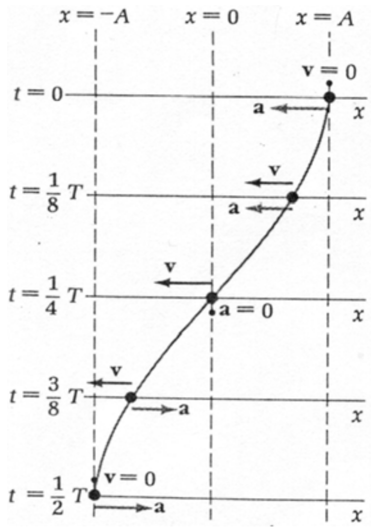
Afleiða sínuslaga breytu er sínuslaga breyta með sömu tíðni. Þannig að v_x og a_x sveiflast með sömu tíðni. Tökum eftir að x sveiflast á milli A og –A, v_x sveiflast á milli ωA og $-\omega A$ og a_x sveiflast á milli $\omega^2 A$ og $-\omega^2 A$. Þess vegna er hámarkshraði hlutarins $v_x = \omega A$ og hámarkshröðunagildið er $a_x = \omega^2 A$.



Mynd 1-4. Tengslin á milli x, v_x og a_x fyrir hlut sem er á einfaldri sveifluhreyfingu: x og v_x eru úr fasa sem nemur $\frac{1}{2}\pi$ rad; v_x og a_x eru úr fasa sem nemur $\frac{1}{2}\pi$ rad; svo x og a_x eru úr fasa sem nemur π

Önnur áhrif diffrunarinnar er fasabreyting sem nemur $\frac{1}{2}\pi$. Af samanburði ferlanna x og v_x á mynd 1-4, þá sést að ferillinn v_x sveiflast á milli hámarka og lágmarka $\frac{1}{2}\pi$ á undan ferlinum x.

Mynd 1-5 sýnir hlut sem er á sveifluhreyfingu á 5 mismunandi tímapunktum frá $t = 0$ þar til $t = T/2$ er náð. Á þessari mynd sést auðveldlega hvernig hámarks- og lágmarkshröðun og hámarks- og lágmarkshraði skiptast á. Það er þegar hraði er í hámarki þá er hröðun í lágmarki og öfugt. Annað sem er fremur athyglisvert er það að hröðununin er alltaf að jafnvægispunkti. Hér hefur verið látið $\phi = 0$ svo myndin sýnir hreyfingu sem á sér stað á milli $x = A$ og $x = -A$. Til þess að sýna hvernig grafið var gert þá skulum við ákveða x, v_x og a_x, þegar $t = 3T/8$. Með innsetningu á $t = 3T/8$ í fasan fáum við $\omega t + \phi = (2\pi/T)(3T/8) + 0 = 3\pi/4$ svo $x = A\cos 3\pi/4 \approx -0{,}7A$; $v_x = -\omega A \sin 3\pi/4 \approx -0{,}7\omega A$; og $a_x = -\omega^2 A\cos 3\pi/4 \approx 0{,}7\omega^2 A$. Þegar $t = 3T/8$ þá sýnir myndin hlutinn þegar $x = -0{,}7A$ með $v = -0{,}7v_{\max} i$ og með $a = 0{,}7a_{\max} i$, íhugum vel tenglsin á milli x, v_x og a_x á grafinu.



Mynd 1-5. Hlutur á einfaldri sveifluhreyfingu sýndur á 5 mismunandi tímapunktum þegar hann ferðast hálfan hring. Tökum eftir stærðum og stefnum hraða og hröðunar á hverjum tímapunkti

Fyrir hlut sem er á einfaldri sveifluhreyfingu þá eru bein tengsl á milli færslunar (x**i**) og og hröðunarinnar (a_x**i**), þar sem og

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

og

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

fáum við að

$$a_x = -\omega^2 x \qquad \textbf{Formúla 1- 6}$$

Fyrir hlut sem verður fyrir einfaldri sveifluhreyfingu, gildir að hröðunin og færslan eru alltaf í gagnstæðar áttir, og mögnunin á milli þeirra eru í réttum hlutföllum.

Þessi tengls eru notuð til þess að sjá hvort kerfi sem er á hreyfingu verði fyrir einfaldri sveifluhreyfingu.

Að finna ϕ og A út frá upphafsaðstæðum

Oft þegar við erum að skoða hlut sem er á sveifluhreyfingu, þá er ϕ og A ekki mælt með beinnri mælingu, en við vitum gildin x_0 og v_{x0}. Stærðirnar x_0 og v_{x0} eru kallaðar *upphafsaðstæður*. Finnum ϕ og A út frá upphafsaðstæðum. Höfum að $t = 0$ í formúlu 1 og í formúlu 4, þá sjáum við að

$$x_0 = A\cos\phi \text{ og } v_{x0} = -\omega A\sin\phi$$ **Formúla 1- 7**

Þessar formúlur gefa okkur x_0 og v_{x0}, en við þurfum að finna ϕ og A. Fyrst finnum við ϕ með því að eyða A. Það gerum við með því að deila í seinni formúluna með þeirri fyrri, þá fáum við $v_{x0}/x_0 = (-\omega A\sin\phi)/(A\cos\phi) = -\omega\tan\phi$. Leysum ϕ út og fáum þá

Fasafastinn ϕ fundinn með tilliti til x_0 og v_{x0}

$$\phi = \tan^{-}\frac{-v_{x0}}{x_0\omega}$$ **Formúla 1- 8**

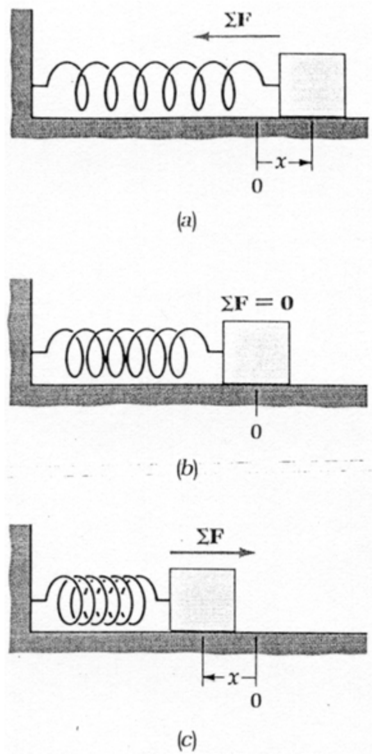
Næst þurfum við að finna A með því að eyða ϕ. Það gerum við með því að einangra hornaföllin í þeim og setjum þau síðan í annað veldi og leggjum þær síðan saman og fáum því $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$. Síðan skiptum við hornaföllum út $(v_{x0}/\omega A)^2 + (x_0/A)^2 = 1$, eða

Sveifluvíddin A fundin með tilliti til x_0 og v_{x0}

$$A = \sqrt{x_0^{\ 2} + \frac{v_{x0}}{\omega^2}}$$ **Formúla 1- 9**

Með einföldu dæmi er hægt að sýna fram á notagildi þessara formúlna. Segju svo að hlutur byrjar í neðstu stöðu (hann er í hvíldarstöðu), þá er augljóst að hann hefur engan hraða. Svo við segjum að $v_{x0} = 0$ svo formúla 1-8 gefur okkur að $\phi = \tan^{-1}(0) = 0$ og formúla 1-9 gefur okkur að $A = \sqrt{x_0^{\ 2} + 0} = |x_0|$. Þetta litla dæmi er stutt af mynd 1-5.

2 Hreyfifræði einfaldrar sveifluhreyfingar



Mynd 1-6. Kubbur festur við gorm. Í þessu kerfi er hægt að hugsa sér að núningur sé nánast enginn og massi gormsins er enginn ef miðað er við massa kubbsins. Gormurinn virkar sem heildarkrafturinn sem virkar á kuppinn.
(*a*) Hluturinn er færður til hægri svo heildarkrafturinn virkar til vinstri; reynir að fara aftur í jafnvægisstöðu.
(*b*) Kubburinn er í jafnvægisstöðu svo heildarkrafturinn er núll.
(*c*) Hluturinn er færður til vinstri svo heildarkrafturinn virkar til hægri. Ef hluturinn er færður frá jafnvægisstöðu og síðan sleppt þá hreyfist hann með einfaldri sveiflu.

Hér að framan var farið í gegnum það hvernig við skilgreinum einfaldar sveifluhreyfingar; en þessi kafli fjallar um hvað veldur þeim. Sem dæmi um einfalda sveifluhreyfingu má hugsa sér kubb með massa *m* tengdann við gorm með kraftstuðulinn *k* (mynd 1-6). Ef við horfum fram hjá núningi, í þessu dæmi, þá rennur kubburinn á lágplaninu með krafti gormsins, sem er F_s. Eða við getum sagt að $\sum F = F_s$. Þar sem jafnanfyrir F_s er

$$F_s = -(kx)i \qquad \textbf{Formúla 1- 10}$$

þá er *x* staðsetning kubbsins þar sem gormurinn hvorki strengdur né samanþjappaður. Þess háttar kraftur er kallaður **línulegur bakkraftur**. Krafturinn er línulegur þar sem hann er línulegt hlutfall af strekkingunni *xi*, og bak vegna þess að hann virkar í öfuga átt við það sem hann strekktur í eða þjappaður saman í. Það er ef *x* er jákvætt þá virkar kraftur í –*x*, og öfugt. Krafturinn reynir að halda hlutnum í miðju stöðu (*x=0*), vegna þess verður krafturinn stærri eftir því sem strekkingin er meiri.
Þar sem kraftur gormsins veitir hlutnum heildarkraft þá gefur annað lögmál Newtons, $\sum F = ma$, okkur

$$-kx = ma_x$$

Skrifum a_x sem d^2x/dt og röðum formúlunni upp á nýtt og fáum því

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \textbf{Formúla 1- 11}$$

Annað lögmál Newtons verður diffurjafna fyrir hnitið *x*. Sem lausn á jöfnunni er stærðartáknið *x* fall af tíma. Hvaða fall af tíma hefur aðra afleiðu sem hefur hlutfallið neikvætt á móti fallinu sjálfu? Þess konar fall kom fram í kaflanum hér á undan. Önnur afleiða af cosínus falli er hlutfallslega neikvætt af cosínus falli. (Sama gildir um sínus fall). Þá getur lausnin verið skrifuð á eftirfarandi hátt.

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

Formúla 1- 1

Eins og við höfum séð, þá er seini afleiðan af *x* þegar tekið er tillit til *t*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

Setjum síðan þessa jöfnu inn í formúlu 1-11

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m} A\cos(\omega t + \phi)$$

Svo einföldum við með því að deila í báðar hliðar með $A\cos(\omega t + \phi)$, eyðum mínusnum og færum veldið yfir. Þá sjáum við að hluturinn verður fyrir einfaldri sveifluhreyfingu og að horntíðnin er því

Horntíðnin ω fundin með tilliti til kraftstuðulsins *k* og massans *m.*

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Formúla 1- 12

Fyrir mjög kraftmikla gorma (stórt *k*) eða lítinn massa, þá eru sveifluhreyfingarnar mjög tíðar; fyrir veikan gorm (lítið *k*) eða mikinn massa, þá eru sveifluhreyfingarnar sjaldnar. Þetta sannreynist venjulegar tilraunir með gorma. Einföld sveifluhreyfing verður til vegna heildarkrafts sem er línulegur bakkraftur.

Svo niðurstaða okkar er sú að kerfi sem gert er úr hlut og gormi sveiflast með hringtíðninni $\omega = \sqrt{k/m}$, getur einnig verið skoðað með því að fella formúlu 1-11 inní formúlu 1-6, þar sem d^2x/dt er skipt út fyrir a_x

Línulegur bakkraftur veldur einfaldri sveiflu

$$a_x = -\frac{k}{m}x \quad \text{og} \quad a_x = -\omega^2 x$$

Þegar $\omega^2 = k/m$, þá eru jöfnurnar þær sömu.

3 Orka einfaldrar sveifluhreyfingu

Ef við hugsum okkur gorm sem þennst út og saman, þá sjáum við að krafturinn sem verður til í gorminum er varðveitist og þess vegna er stærðartáknið fyrir stöðuorku gorms er $U = \frac{1}{2}kx^2$. Ef við notum formúlu 1-1, þá finnum við stöðuorku kerfis með gorm og hlut er $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left[A\cos(\omega t + \phi)\right]^2$, *eða*

$$U = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

Formúla 1- 13 Stöðuorka í einfaldri sveifluhreyfingu

Á svipaðan hátt getum við með formúlu 1-14 fundið vélræna orkuna í kerfi með gorm og hlut $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[-\omega A\sin(\omega t + \phi)\right]^2$, eða

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

Formúla 1- 14 Vélrænaorkan í einfaldri sveifluhreyfingu

Hámarksgildi hornafallanna (cosínus og sinus) í öðru veldi er 1, svo við getum sagt að stöðuorkan og hreyfiorkan séu

$$U = U_{\max} \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$K = K_{\max} \sin^2(\omega t + \phi)$$

Þar sem $U_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$ og $K_{\max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$. Þar sem $\omega^2 = k/m$, $K_{\max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m(k/m)A^2 = \frac{1}{2}kA^2$, eða

$$K_{\max} = U_{\max}$$

Í sveiflukerfi með gorm og hlut þá virkar aðeins kraftur gormsins. Þar af leiðandi er vélrænaorkan *E* af sveiflunni

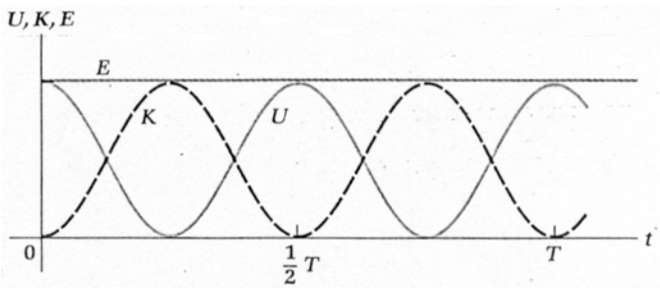
$$E = K + U = K_{\max} \sin^2(\omega t + \phi) + U_{\max} \cos^2(\omega t + \phi)$$

Við notum að $K_{\max} = U_{\max}$ og að $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ og við höfum að $E = K_{\max} = U_{\max}$, eða

Hreyfiorkan í einfaldri sveifluhreyfingu

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$ **Formúla 1- 15**

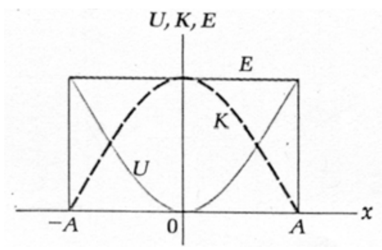
Vélræna orkan í sveiflunni er fasti; einföld sveifuhreyfing er varðveislu kerfi.



Mynd 1-7. Stöðuorkan *U* og hreyfiorkan *K* miðað við tíman *t*, fyrir einfalda sveiflu. $(\phi = 0)$. Tökum eftir að $E = U_{\max} = K_{\max}$

Graf fyrir *K* og *U* miðað við tíma er sýnt á mynd 1-7 ($\phi = 0$). Hvert fall sveiflast á milli *0* og *E*. Orkan í sveiflunni skiptist sitt á hvað á milli hreyfi- og stöðuorku, og aftur til baka.

Formúlur 1-13 og 1-14 gefa okkur stöðu- og hreyfiorkuna sem fall af tíma. Hugsum okkur nú þessar formúlur sem fall af hnitunum x. Jafnan fyrir stöðuorku sem fall af x er $U = \frac{1}{2}kx^2$. Svo notum við varðveislulögmálið til þess að finna K sem fall af x; $E = K + U = K + \frac{1}{2}kx^2$, eða



Mynd 1-8. Stöðuorkan U og hreyfiorkan K miðað við staðsetningu x, fyrir einfalda sveiflu.

$$K = E - \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 - \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

Mynd 1-8 sýnir okkur gröf U og K miðað x. Hvor bylgjan er fleygbogi með topppunkt í $x = 0$. Finnum punktinn sem þessir tveir fleygbogar skerast, þar er $U = K$ eða $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx$ leysum út fyrir x, þá fáum við að $x = \pm A/\sqrt{2} \approx \pm 0{,}7A$

4 Dæmi um einfaldar sveifluhreyfingar.

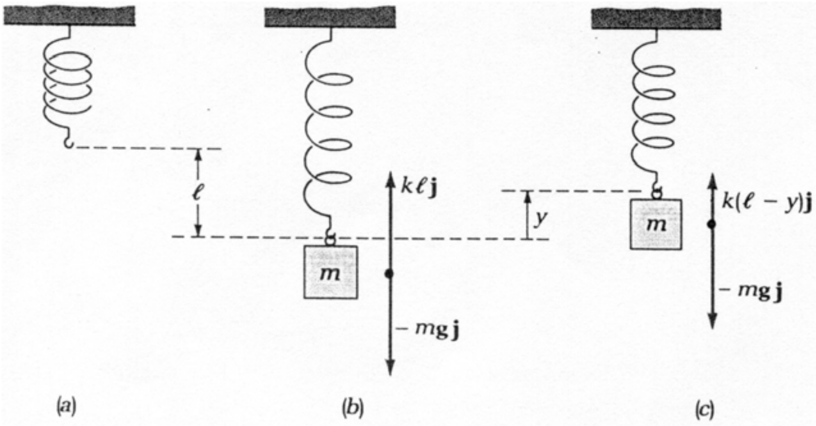
Sem aðaldæmi um einfalda sveifluhreyfingu, þá hugsum við okkur hlut sem er tengdur gormi og saman vinna þeir í lagréttu plani. Heildarkraftur er kraftur gormsins vegna þess að við lítum fram hjá núningi þar sem við segjum hann vera gott svo sem enginn. Hröðun hlutarins er í réttum hlutföllum miðað við færsluna en í öfuga átt. Það eru til mörg önnur kerfi sem virka þannig að hröðunin er í grundvallaratriðum hlutfallsleg á móti færslunni, svo út komi einföld sveifluhreyfing.

Hlutur sem er festur í lóðréttann gorm.

Hugsum okkur léttan gorm með kraftstuðulinn k sem er festur lóðrétt (mynd 1-9a). Upphaflega er hann hvorki strekktur né spenntur. Síðan er hlutur með massann m festur neðan í hann. Síðan er hlutnum hægt og rólega látinn síga þar til að jafnvægispunkti er náð (mynd 1-9b). Í þessari stöðu er gormurinn strekktur um færsluna l og hann notar síðan kraftinn upp með mögnuninni *kl*. Hluturinn er í jafnvægisstöðu og kraftur gormsins setur jafnvægi á massa hlutarins með mögnuninni *mg*:

$$kl = mg$$ **Formúla 1- 16**

Mynd 1-9.
(*a*) Léttur gormur er hengdur upp lóðrétt.
(*b*) Kubburinn er í jafnvægisstöðu þar sem $j(kl - mg) = 0$.
(*c*) Gormurinn er strekktur sem nemur $l - y$, og heildarkrafturinn er $[k(l - y) - mg]j = -kyj$, sem reynir að setja gorminn aftur í jafnvægisstöðu



Færslan hlutar frá jafnvægisstöðu er gefið með *y*

Ef hlutnum er sleppt þegar kerfið er í jafvægispunkti, þá mun kraftur gormsins ekki jafvægisstilla þungann, og hluturinn fær hröðun. Nú skulum við ákveða hröðunina. Veljum þann punkt á *y*-ásnum þar sem jafnvægispunkturinn er, eins og sýnt er á mynd 1-9c, sem sýnir jafnframt þá tvo krafta sem virka á á hlutinn þegar hann er staðsettur á *y* hnitinu. Tökum eftir að *y* sýnir færlsu hlutarins frá jafnvægispunkti. En gormurinn er strekktur um færsluna $l - y$, svo gormurinn skýst til baka með krafti sem er magnaður um $k(l - y)$. Þungi hlutarins virkar niður og hefur mögnunarhlutfallið mg. Þar af leiðandi hefur *y* áhrif á heildarkraftinn sem er $\sum F_y = k(l - y) - mg$. Notum annað lögmál Newtons og fáum þá

$$\sum F_y = k(l - y) - mg = ma_y$$

Formúla 1-16 sýnir fram á strekkinguna *l* þegar hluturinn er í jafnvægispunkti, svo $kl - mg = 0$. Þessi jafna einfaldast í $-kl = ma_y$, eða

$$a_y = -\frac{k}{m}y$$ **Formúla 1- 17**

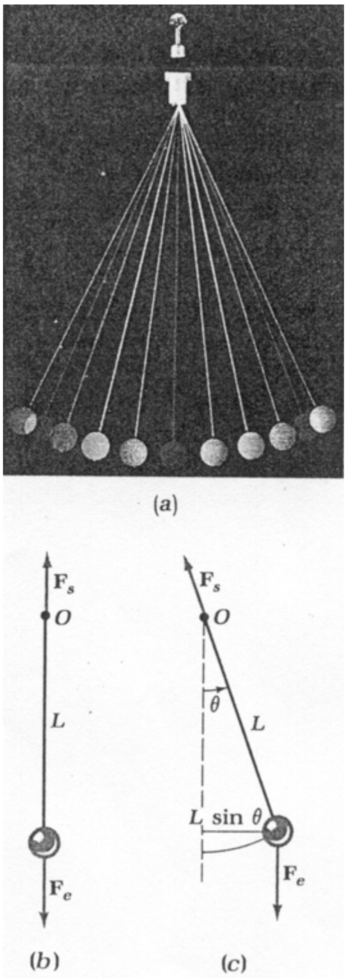
Hröðun hlutarins er hlutfallsleg en á móti færslunni frá jafnvægispunkti.

Hlutur á lóðréttum gormi hreyfist eftir einfaldri sveiflu

Samanburður á formúlu 1-17 og hins einfalda forms sveifluhreyfingar (formúla 1-6), leiðir í ljós að þær eru þær sömu en x og y hafa skipt um hlutverk ef $\omega^2 = k/m$. Það er að hreyfing hlutarins sem festur er við lóðrétta gorminn er sveifluhreyfing með horntíðninni $\omega = \sqrt{k/m}$. Hnit hlutarins er gefin með

$$y = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$ **Formúla 1- 18**

Einfaldur pendúll



Mynd 1-10. (*a*) sýnir hraðljósmynd af pendúl sem sveiflast fram og til baka. (*b*) Heildarkraftvægið er núll á *O* vendiásnum þegar pendúllinn er í jafnvægisstöðu. (*c*) Kraftvægið á *O* ásnum reynir að láta pandúlinn ná jafnvægisstöðu sökum þungans.

Reglubundnar hreyfingar hreyfingar pendúls hafa verið notaðar lengi í klukkur til þess að stýra gangi klukkunar. Pendúll verður fyrir einfaldri sveifluhreyfingu þegar hann færist lítið frá jafnvægisstöðu. Hér tölum við um einfaldan pendúl ef hann er þannig uppbyggður að á öðrum endan er allur massinn og hann er festur upp á hinum endanum. Eins og bolti og band pendúll á mynd 1-10. Boltin er þá lóð pendúlsins sem hefur lengdina *L*.

Mynd 1-10a sýnir lóðið á jöfnum tímabilum. Í þessari hreyfingu breytist heyfiorkan og stöðuorkan fram og til baka. Hreyfiorkan er mest þegar lóðið er í neðstu stöðu og þyngdarstöðuorkan er mest þegar lóðið er í efstu stöðu.

Þrátt fyrir að pendúllinn sveiflast í tvöföldu plani þá sveiflast hann í hringlaga boga. Þess vegna er hægt að skoða þess hreyfingu með því að nota einföld hornaföll og snúningsaflfræði.

Pendúllinn er sýndur í jafvægisstöðu á mynd 1-10b. Þar virka tveir kraftar á pendúlinn; þyngd lóðsins $\mathbf{F}_e$ og krafturinn $\mathbf{F}_s$ sem fer út um bandið í uppistöðuna. Við veljum okkur vendiásinn *O*, sem er staðsettur á þeim enda pendúlssins sem festur er upp og er hann hornréttur á bandið. Fyrir þessa stöðu er kraftvægið um vendiásinn *O* núll, fyrir hvaða utanaðkomandi kraft sem verkar á kerfið, einnig er hornahröðunin $\alpha_x = 0$.

Ef pendúllinn er sýndur eins og á mynd 1-10c, þá er heildar ytrakraftvægi um vendiásinn *O* sökum þungans. Fyrir jákvæða hornið θ, eins og sýnt er á þessari mynd, þá veldur kraftvægið réttum snúningi frá jafvægisstöðu. Hornrétta (lárétta) færslan frá jafvægisstöðu að núverandi stöðu er $L\sin\theta$. Þá er kraftvægið $\tau_z = -F_e L\sin\theta = -mgL\sin\theta$. Þar sem hægt er að sleppa massi taugarinnar (þar sem hann er svo lítill), þá getum við sagt að tregðuhreyfing pendúlsins um ásinn *O* sé vegna massans *m* sem hefur lengdina *L* frá ásnum. Það er $I = mL^2$. Nú skulum við bæta öðru lögmáli Newtons við horna hreyfinguna ($\sum \tau_z = I\alpha_z$),

$$-mgL\sin\theta = mL^2\alpha_z$$

Með því að stytta út og einangra hornahröðunina fáum við

$$\alpha_z = -\frac{g}{L}\sin\theta$$ **Formúla 1- 19**

fyrir hringhreyfinguna.

Nú skulum við bera saman formúlu 1-19 við formúlu 1-16 fyrir einfalda sveifluhreyfingu $a_x = -\omega^2 x$. Vinstri hliðar jafnanna eru hliðstæður: $\alpha_z = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ er hornahröðun og $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ er línuleg hröðun. Hægri hliðar jafnanna eru líka í samræmi, en aðeins ef pendúllinn ferðast litla vegalengdir frá jafnvægisstöðu. Þá er $\sin\theta \approx \theta$ þegar θ er sett í radíana. Ef við skiptum $\sin\theta$ út fyrir θ í formúlu 1-19 þá fáum við

$$\alpha_z = -\frac{g}{L}\theta$$

sem samsvarar fyllilegar $a_x = -\omega^2 x$ þar sem $\omega^2 = g/L$. Þar sem α_z er hlutfallslegt miðað við $-\theta$ fyrir litlar færslur frá jafnvægisstöðu, þá hreyfist pendúllinn í einfaldri sveifluhreyfingu. Þess vegna er hornið frá jafnvægisstöðu einfalds pendúls sem hreyfist í litlar vegalengdir

$$\theta = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (\omega^2 = g/L)$$

Formúla 1- 20

Pendúll hreyfist eftir einfaldri sveiflu, í litlum færslum frá jafnvægisstöðu.

Þar sem θ er horn, þá þarf að túlka sum táknin í formúlu 1-20 mjög vel. A táknar $\theta_{\max}$.

Þar sem θ sveiflast á milli $+\theta_{\max}$ og $-\theta_{\max}$. Hortíðni sveifluhreyfingarinnar er í formúlu 1-20 þá fáum við

$$\omega_z = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

Þessi aðferð til þess að sýna fram á hornahraðann samsvarar $v_x = dx/dt = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$ fyrir línulegan hraða á línulegri hreyfingingu.

Þar sem horntíðnin er $\omega^2 = g/L$ þá er tímabilið $T = 2\pi/\omega$ gefið með formúlunni

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Formúla 1- 21

Tökum eftir að tímabilið er óháð massa lóðsins; það er aðeins lengd taugarinnar og g sem hafa áhrif á tímabilið. Ef tími sveiflunarinnar er mældur á mjög nákvæman hátt þá getum við ákveðið g. Með þessum hætti er hægt að mæla þyngdarhröðun á tunglinu og einnig er hægt að nýta sér þessa aðferð til þess að finna náttúrlegar auðlindir í jarðveginum.

Tímabil í einföldu pendúlskerfi er ákveðið miðað við lengd hans

Samantekt

Hluti - 1 Hreyfilýsing einfaldrar sveifluhreyfingar

Fyrir hluti sem eru á einfaldri sveifluhreyfingu

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{Formúla 1- 1}$$

$$v_x = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \qquad \text{Formúla 1- 22}$$

$$a_x = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{Formúla 1- 23}$$

Hornhraðinn ω, tíðnin v og tíminn T tengjast á eftirfarandi hátt

$$\omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T}$$

Einföld sveifluhreyfing getur verið greind með eftifarandi formúlu ef

$$a_x = -\omega^2 x \qquad \text{Formúla 1- 24}$$

Hluti - 2 Hreyfifræði einfaldrar sveifluhreyfingar

Línulegur bakkraftur veldur einfaldri sveifluhreyfingu. Ef öðru lögmáli Newtons er beitt á hlut á þannig hreyfingu þá fáum vi ðút diffurjöfnuna

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \text{Formúla 1- 25}$$

Lausn á þessari jöfnu er að $x = A\cos(\omega t + \phi)$, ef $\omega = \sqrt{k/m}$

Hluti - 3 Orka einfaldrar sveifluhreyfingu

Stöðu- og hreyfiorka hlutar í einfaldri sveifluhreyfingu er

$$K = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad \text{Formúla 1- 26}$$

$$U = \tfrac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad \text{Formúla 1- 27}$$

og vélræna orkan er fast:

$$E = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad \text{Formúla 1- 28}$$

Hluti - 4 Dæmi um einfaldar sveifluhreyfingar.

Í kerfi sem er á einfaldri sveifluhreyfingu, þar sem hlutur er festur neðan í gormi þá gildir að $\omega = \sqrt{k/m}$, og gildin x og y hafa skipt um hlutverk. Í einföldum pendúl $\omega = \sqrt{g/L}$.

Dæmi

1. Hlutur hreyfist eftir einfaldri sveiflu með $a_{\max} = 13 m/s^2$ **,** $T = 0{,}94 s$ **og** $\phi = \frac{1}{2}\pi$ **.**

(i) **Skrifaðu upp formúlur til þess að finna *x*, v_x og a_x.**

(ii) **Finnum liðina í (i) þegar** $t = 0{,}54 s$

Svar: (i)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$A = \frac{\omega^2}{a_{\max}}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v_x = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a_x = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

(ii)

$$\omega = \frac{2\pi}{0{,}94} = 6{,}684 rad/s$$

$$A = \frac{6{,}684^2}{13} = 3{,}437 m$$

$$x = 3{,}437\cos\left(6{,}684 \cdot 0{,}54 + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 3{,}423$$

$$v_x = -6{,}684 \cdot 3{,}437\sin\left(6{,}684 \cdot 0{,}54 + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -2{,}074 m/s$$

$$a_x = -6{,}684^2 \cdot 3{,}437\cos\left(6{,}684 \cdot 0{,}54 + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -13{,}863 m/s^2$$

2. Sveiflukerfi með gorm með kraftstuðull $k = 45\,N/m$ **og kubb með massann** $m = 0{,}88kg$ **.**

Finndu (*a*) ω **;**

(*b*) *v*;

(*c*) *T*

Svar: (*a*) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{45}{0{,}88}} = 7{,}151 rad/s$

(*b*) $v = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{7{,}151}{2\pi} = 1{,}14Hz$

(*c*) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{7{,}151} = 0{,}879s$

4. 20 kg krakki sveiflast fram og til baka í rólu með 3m langa taug með 0,7rad sveifluvídd. Finnum tímabilið og tíðnina

Svar: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3}{9{,}8}} = 3{,}48s$

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{3{,}48} = 0{,}288Hz$$

Lokaorð

Í þessari samantekt höfum við séð að sveifluhreyfingar er ein einfaldasta hreyfingin í tilverunni. En þrátt fyrir það fleytir skilningur okkar á þessum hreyfing okkur örlítið áfram í leit okkar um leyndarmál alheimsins. Sá tími sem ég og fleiri höfum eytt í Fjölbrautaskólanum í Breiðholti, þá hafa eðlisfræðitímarnir verið með þeim merkustu. Þetta eru frjálslegir tímar, þar sem umræðan hefur verið alheimsvandamálin. Allir hafa fengið að taka þátt í umræðunni. Það skemmtilega við þessa áfanga er það er ekki neitt tekið sem gefinn hlutur, ef einhver telur staðreyndir vera rangar þá segir hann frá því og ástæðan á bak við það er rætt þar til rök koma sem sanna staðreyndirnar. Eðlisfræði er grein á uppleið og ég vona að ég hafi haft gott notagildi af því að hafa tekið alla þessa áfanga.